数理解析研究所講究録
1094 巻 1999 年 11-28

$SO_0(2n,2)$ の離散系列 Whittaker 関数について

谷口 健二 (Kenji Taniguchi) [1]

青山学院大学理工学部

1 序

本稿では符号 $(2n,2)$ の実二次形式を保つ線形変換の群 $SO(2n,2)$ の単位元連結成分 $SO_0(2n,2)$ の離散系列表現の minimal K-type ベクトルに付随した Whittaker 関数の明示公式と、Whittaker 関数の空間の次元について概説する。

この短期共同研究で発表された他の研究と同様に、この研究に於いても Whittaker 関数の計算にはいわゆる Schmid 作用素を用いている。Schmid 作用素から得られる微分差分方程式系を解くことがこの研究の中心になるが、$SO_0(2n,2)$ の場合に詳しく述べると膨大なページ数を必要としてしまう。そのため本稿では Whittaker 関数を求めるための微分差分方程式系の具体的な計算には深くは立ち入らないことにし、微分方程式系の解空間の次元に関することを述べた上で Whittaker 関数の明示公式を提示したいと思う。

同じ実階数 2 のリー群を扱っているにもかかわらず、$SO_0(2n,2)$ の場合には、$Sp(2,\mathbb{R})$ や $SU(2,2)$ といった quasi-split な群の時と異なった理由に起因する困難点が存在する。例えば Schmid 作用素から得られる微分差分方程式系の解の候補が見つかったとしても、それが本当に解になっているのかどうかは自明ではない (注 3.8)。表現のパラメータが「singular に近い」時は直接計算で求まるが、十分 regular な時にはそうはいかない。別の言い方をすれば、解空間の次元を上から押さえることは「比較的」容易であるが、下から押さえることは、具体的に得られた方程式系だけから判断するのが困難であり、別の手法を使わなければならない。

その「手法」として Harish-Chandra 加群の Whittaker 関数の空間への埋め込みの次元はその Harish-Chandra 加群の Bernstein 次数に一致する、という松本久義の結果 ([6]) を引用し、Bernstein 次数を明示的に求めることを考える。

離散系列表現の随伴多様体は既約であるため、簡単な計算によって随伴サイクルの係数と Bernstein 次数とが、随伴多様体のみによって決まる定数倍を除いて一致することがわかる。つまり随伴サイクルがわかっていれば、Whittaker 関数の空間の次元を知るにはこの定数さえ求めればよいことになる。この定数を直接求めることは、随伴多様体の次数を求めることであり、代数幾何的問題であるが、松本の結果を用いれば、表現のパラメータが「singular に近い」とき (このときは上述のように Whittaker 関数の微分方程

[1]taniken@gem.aoyama.ac.jp

式系に関する直接計算で解空間の次元、つまり Bernstein 次数が求まる) に Bernstein 次数と随伴サイクルの係数を比較すれば比較的容易に求まってしまう。

表現の随伴サイクルの明示形は一般にはあまり知られていないが、実階数 1 の半単純線形 Lie 群の離散系列表現に対しては J.T. Chang による研究がある。彼の議論はある一つの命題を modulo すれば一般実階数の半単純線形 Lie 群に対して適応可能である。この modulo した命題に対する反例は、現在のところ高階数の群でも見つかっておらず一般に成り立つものと期待される。その命題の証明は現時点ではうまい方法が知られておらず、かなり面倒であるが、本稿で扱う $SO_0(2n,2)$ という群に関しては正しいことが証明できた。

Whittaker 関数の問題を離れても、この Bernstein 次数や随伴サイクルを明示的に求めるという問題は重要且つ興味深いものと思われる。今後この方向の研究が進み、そこから Whittaker 関数に関する情報が得られることを期待している。

2 $SO_0(2n,2)$ の離散系列表現

2.1 $SO_0(2n,2)$ の構造

本稿では実 Lie 群・実 Lie 環には添え字 $_{\mathbb{R}},\ _0$ をつけることとし、複素 Lie 群・複素 Lie 環には何も添え字をつけないこととする。また実 Lie 群・Lie 環とその複素化には同じアルファベットを用いることとする。

$SO_0(2n,2)$ は符号 $(2n,2)$ の実二次形式を保つ群 $SO(2n,2)$ の単位元を含む連結成分である。I_k を k-次単位行列として $I_{2n,2}=\begin{pmatrix} I_{2n} & O \\ O & -I_2 \end{pmatrix}$ と置くと、$G_{\mathbb{R}}=SO(2n,2)$ とその Lie 環 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{so}(2n,2)$ は

$$\begin{aligned} SO(2n,2) &= \{g\in SL(2n+2,\mathbb{R});{}^t g I_{2n,2} g = I_{2n,2}\} \\ \mathfrak{so}(2n,2) &= \{X\in M(n,\mathbb{R});{}^t X I_{2n,2}+I_{2n,2}X=O\} \end{aligned}$$

と実現される。

$\theta: G_{\mathbb{R}}\ni g\longmapsto I_{2n,2}{}^t g^{-1} I_{2n,2}\in G_{\mathbb{R}}$ は $G_{\mathbb{R}}$ の Cartan 対合である。その微分も同じ記号 $\theta:\mathfrak{g}_0\to\mathfrak{g}_0$ で表せば、$G_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{g}_0$ の Cartan 分解 $G_{\mathbb{R}}=K_{\mathbb{R}}\times\exp\mathfrak{p}_0$,

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$;

$$\begin{aligned}
K_{\mathbb{R}} &= \{\begin{pmatrix} k_1 & O \\ O & k_2 \end{pmatrix}; k_1 \in SO(2n), k_2 \in SO(2)\}, \\
\mathfrak{k}_0 &= \{\begin{pmatrix} X_1 & O \\ O & X_2 \end{pmatrix}; X_1 \in \mathrm{Alt}(2n), X_2 \in \mathrm{Alt}(2)\}, \\
\mathfrak{p}_0 &= \{\begin{pmatrix} O & X \\ {}^tX & O \end{pmatrix}; X \in M(2n, 2; \mathbb{R})\}
\end{aligned}$$

が得られる。複素化された Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ で表す。

$\mathfrak{a}_{m,0}$ を $\mathfrak{p}_0$ の極大可換部分空間とし、$\Delta := \Sigma(\mathfrak{a}_{m,0}, \mathfrak{g}_0)$ をルート系、$\alpha \in \Delta$ に対して $\mathfrak{g}_{0,\alpha}$ をルート空間とする。Δ の一つの正系 Δ^+ を固定し、$\mathfrak{n}_{m,0} := \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_{0,\alpha}$ とすると、$\mathfrak{g}_0$ の岩沢分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a}_{m,0} + \mathfrak{n}_{m,0}$ が得られ、$A_{m,\mathbb{R}} := \exp \mathfrak{a}_{m,0}$, $N_{m,\mathbb{R}} := \exp \mathfrak{n}_{m,0}$ とすれば、G_R の岩沢分解 $G_{\mathbb{R}} = K_{\mathbb{R}} A_{m,\mathbb{R}} N_{m,\mathbb{R}}$ が得られる。

$G_{\mathbb{R}} = SO_0(2n, 2)$ の場合、$\mathfrak{a}_m$ は 2 次元であり、Killing 形式に関する正規直交基底 A_1, A_2 を決め、双対基底を f_1, f_2 とすると、$\Delta = \{\pm f_1, \pm f_2\} \cup \{\pm f_1 \pm f_2\}$ と表され、ルート空間の次元は $\dim \mathfrak{g}_{0,\pm f_i} = 2n-2$, $\dim \mathfrak{g}_{0,\pm f_1 \pm f_2} = 1$ である。ルート系 Δ の正系 Δ^+ を $\Delta^+ = \{f_1, f_2, f_1 \pm f_2\}$ と決めておく。

2.2 $SO_0(2n, 2)$ の離散系列表現

$\mathfrak{h}_0$ を $\mathfrak{k}_0$ の Cartan 部分環とする。$\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ の正規直交基底 $\{H_1, \dots, H_n\}$ を固定し、その双対基底を $\{e_1, \dots, e_n\}$ とすると、ルート系 $\Sigma := \Sigma(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ と $\Sigma_c := \Sigma(\mathfrak{h}, \mathfrak{k})$ は

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \{\pm e_i \pm e_j; 1 \leq i < j \leq n+1\}, \\
\Sigma_c &= \{\pm e_i \pm e_j; 1 \leq i < j \leq n\}
\end{aligned}$$

である。Σ_c の元をコンパクトルートといい、$\Sigma_n := \Sigma \setminus \Sigma_c$ の元を非コンパクトルートという。Σ_c の正系 Σ_c^+ を $\{e_i \pm e_j; 1 \leq i < j \leq n\}$ ととると、Σ_c^+ を含む Σ の正系 Σ^+ は $2n+2$ 個あり、それらを

$$\begin{aligned}
\Sigma_k^+ &= \Sigma_c^+ \cup \{e_i \pm e_{n+1}; i = 1, \dots, k-1\} \cup \{e_{n+1} \pm e_i; i = k, \dots, n\} \\
&\qquad (1 \leq k \leq n+1), \\
\Sigma_k^- &= \Sigma_c^+ \cup \{e_i \pm e_{n+1}; i = 1, \dots, k-1\} \cup \{-e_{n+1} \pm e_i; i = k, \dots, n\} \\
&\qquad (1 \leq k \leq n), \\
\Sigma_{n+1}^- &= \Sigma_c^+ \cup \{e_i \pm e_{n+1}; i = 1, \dots, n-1\} \cup \{-e_n \pm e_{n+1}\}
\end{aligned}$$

と表す。

よく知られているように、$G_{\mathbb{R}}$ の離散系列表現は $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ で以下の条件を満たすものの集合 Ξ_c^+ でパラメトライズされる：

(i) 任意の $\alpha \in \Sigma$ に対して　$\langle \Lambda, \alpha \rangle \neq 0.$

(ii) 任意の $\beta \in \Sigma_c^+$ に対して $\langle \Lambda, \beta \rangle \geq 0.$

(iii) 写像 $\exp \mathfrak{h}_0 \ni \exp H \longmapsto \exp\langle \Lambda + \rho, H \rangle \in \mathbb{C}^\times$ は $\exp \mathfrak{h}_0$ のユニタリ指標を与える.

ここで (iii) の $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ のカップリングであり、(ii) のそれは Killing 形式による $\mathfrak{h}^*$ 上の双線形形式である。また ρ は Σ^+ の元の和の 1/2 である。パラメータ $\Lambda \in \Xi_c^+$ を離散系列表現の Harish-Chandra パラメータといい、対応する離散系列表現を π_Λ で表すことにする。

Σ_c^+ を含む Σ の正系の分類により、Ξ_c^+ は

$$\Xi_k^\pm := \{\Lambda \in \Xi_c^+; \text{任意の } \beta \in \Sigma_k^\pm \text{ に対して } \langle \Lambda, \beta \rangle \geq 0 \text{ が成り立つ}\}$$

という $2n+2$ 系列に分けることができる。

2.3 Whittaker 関数

$\eta : N_{m,\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を $N_{m,\mathbb{R}}$ のユニタリ指標とする。$G_\mathbb{R}$ 上の関数 F で、任意の $n \in N_{m,\mathbb{R}}$ と $g \in G_\mathbb{R}$ に対して

$$F(gn) = \eta(n)^{-1} F(g)$$

を満たすものを $G_\mathbb{R}$ の Whittaker 関数と呼び、集合

$$\begin{aligned} &C^\infty(G_\mathbb{R}/N_{m,\mathbb{R}}; \eta) \\ &\quad := \{F : G_\mathbb{R} \overset{C^\infty}{\to} \mathbb{C}; F(gn) = \eta(n)^{-1}F(g), (\forall n \in N_{m,\mathbb{R}}, \forall g \in G_\mathbb{R})\} \end{aligned}$$

を (C^∞-)Whittaker 関数の空間と呼ぶことにしよう。左移動によりこれは $G_\mathbb{R}$ の表現空間である。

(π, W) を $G_\mathbb{R}$ の表現とする。(π, W) の $C^\infty(G_\mathbb{R}/N_{m,\mathbb{R}}; \eta)$ に於ける実現を (π, W) の Whittaker モデルと呼ぶ。(π, W) が $\mathfrak{g}_0$ の表現や Harish-Chandra $(\mathfrak{g}, K_\mathbb{R})$-加群の時にも同様の言葉遣いをすることにする。この実現により、W の元 v は $G_\mathbb{R}$ 上の関数で表されるが、この関数を v に付随した Whittaker 関数という。

2.4 Whittaker モデルの存在条件

この小節では松本久義による Whittaker モデルの存在条件と次元に関する結果を引用する ([6])。

Whittaker 関数の空間の定義の C^∞ を $\mathcal{A}$ (実解析的) に置き換えたものを $\mathcal{A}(G_\mathbb{R}/N_{m,\mathbb{R}}; \eta)$ で表す。既約 Harish-Chandra 加群は無限小指標を持つので、既約な V の埋め込み先としては C^∞ で考えても $\mathcal{A}$ で考えても同じことになることに注意しておく。

定理 2.1 *([6])*

(i) 既約な *Harish-Chandra* $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{R}})$-加群 V が *Whittaker* モデルを持つ、即ち $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K_{\mathbb{R}})}(V, \mathcal{A}(G_{\mathbb{R}}/N_{m,\mathbb{R}};\eta)) \neq \{0\}$ であるための必要十分条件は、V の *Gelfand-Kirillov* 次元 $\mathrm{Dim}V$ が $\dim \mathfrak{n}_{m,0}$ に等しいことである。

(ii) V が *Whittaker* モデルを持つとき、つまり $\mathrm{Dim}V = \dim \mathfrak{n}_{m,0}$ であるとき、$\dim \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K_{\mathbb{R}})}(V, \mathcal{A}(G_{\mathbb{R}}/N_{m,\mathbb{R}};\eta))$ は V の *Bernstein* 次数 $\mathrm{Deg}V$ に等しい。

$G_{\mathbb{R}} = SO_0(2n,2)$ $(n \geq 2)$ について考えよう。$\Lambda \in \Xi_1^{\pm}$ に対応するものは正則(反正則)離散系列であり、$\Xi_{n+1}^{\pm}$ はいわゆる "middle" 離散系列である。これらの Gelfand-Kirillov 次元は $\dim \mathfrak{n}_{m,0}$ より真に小さく、それ故 Whittaker モデルを持たない。このことは Schmid 作用素による具体的な計算からもわかる (命題 3.7)。一方、$\Lambda \in \Xi_k^{\pm}$ $(k = 2, \ldots, n)$ に対応する離散系列は Gelfand-Kirillov 次元が $\dim \mathfrak{n}_{m,0}$ に等しいので Whittaker モデルを持ち、以下の議論においてはこれらが主役となる。

3 Whittaker 関数の微分差分方程式系

以下この節では、[9] に従い、離散系列表現の Harish-Chandra 加群の Whittaker モデルを Schmid 作用素により実現し、Whittaker 関数の満たすべき微分方程式系を求める。

3.1 Schmid 作用素による Whittaker 関数の実現

$K_{\mathbb{R}}$ の有限次元表現 (τ, V_τ) に対して、

$$C_\tau^\infty(K_{\mathbb{R}}\backslash G_{\mathbb{R}}/N_{m,\mathbb{R}};\eta)$$
$$:= \{F : G_{\mathbb{R}} \xrightarrow{C^\infty} V_\tau; F(kgn) = (\eta(n)^{-1}\tau(k))F(g), (n \in N_{m,\mathbb{R}}, g \in G_{\mathbb{R}}, k \in K_{\mathbb{R}})\}$$

とする。

Harish-Chandra パラメータ Λ に対して $\lambda = \Lambda - \rho + 2\rho_n$ は離散系列表現の Blattner パラメータと呼ばれる。ここで ρ は Λ が dominant になるような Σ の正系 Σ^+ の元の和の 1/2 であり、ρ_n は Σ^+ の非コンパクトルートの和の 1/2 である。よく知られているように、λ は π_Λ の極小 $K_{\mathbb{R}}$-タイプの highest weight である。

$(\tau_\lambda, V_\lambda)$ を highest weight が λ であるような $K_{\mathbb{R}}$ の既約有限次元表現とする。また $K_{\mathbb{R}}$ の随伴作用による $\mathfrak{p}$ 上の表現を $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{p})$ で表す。

$\mathfrak{p}_0$ を Killing 形式によりユークリッド空間と見たときの正規直交基底 $\{X_i\}$ を一つ固定し、$C_{\tau_\lambda}^\infty(K_{\mathbb{R}}\backslash G_{\mathbb{R}}/N_{m,\mathbb{R}};\eta)$ から $C_{\lambda\otimes\mathrm{Ad}\tau}^\infty(K_{\mathbb{R}}\backslash G_{\mathbb{R}}/N_{m,\mathbb{R}};\eta)$ への $K_{\mathbb{R}}$-

準同型 $\nabla_{\tau_\lambda,\eta}$ を

$$\nabla_{\tau_\lambda,\eta}\phi(g) := \sum_i L_{X_i}\phi(g)\otimes X_i$$

で定める。ここで L_{X_i} は右移動の微分である。

テンソル積 $\tau_\lambda \otimes \mathrm{Ad}$ は $\tau_\lambda^{\pm} := \oplus_{\alpha\in\Sigma_n^{\pm}} m_\alpha \tau_{\lambda\pm\alpha}$ ($m_\alpha \in \{0,1\}$) として $\tau_\lambda \otimes \mathrm{Ad} \simeq \tau_\lambda^+ \oplus \tau_\lambda^-$ と分解される。$\mathrm{pr}_- : \tau_\lambda \otimes \mathrm{Ad} \to \tau_\lambda^-$ を射影として $\mathcal{D}_{\lambda,\eta} := \mathrm{pr}_- \circ \nabla_{\tau_\lambda,\eta} : C^\infty_{\tau_\lambda}(K_\mathbb{R}\backslash G_\mathbb{R}/N_{m,\mathbb{R}};\eta) \to C^\infty_{\tau_\lambda^-}(K_\mathbb{R}\backslash G_\mathbb{R}/N_{m,\mathbb{R}};\eta)$ とする。次の定理により、離散系列表現の Whittaker モデルや極小 $K_\mathbb{R}$-タイプのベクトルに付随した Whittaker 関数の決定が、$\mathcal{D}_{\lambda,\eta}\phi = 0$ という微分差分方程式系を解くことに帰着される。

定理 3.1 *([9]) Blattner* パラメータ λ が「壁から遠い」ならば、

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K_\mathbb{R})}(\pi^*_{\Lambda,K_\mathbb{R}}, C^\infty(G_\mathbb{R}/N_{m,\mathbb{R}})) \simeq \mathrm{Ker}(\mathcal{D}_{\lambda,\eta})$$

が成り立つ。ここで π^*_Λ は π_Λ の反傾表現を表し、添え字 $_{K_\mathbb{R}}$ は π_Λ の $K_\mathbb{R}$-有限ベクトルの空間よりなる *Harish-Chandra* 加群の意味である。

注 3.2 $M_{m,\mathbb{R}}$ を $K_\mathbb{R}$ における $A_{m,\mathbb{R}}$ の中心化部分群とし、$M_{m,\mathbb{R}}(\eta)$ を $M_{m,\mathbb{R}}$ における η の中心化部分群とする。このとき $M_{m,\mathbb{R}}$ は $N_{m,\mathbb{R}}$ のユニタリ指標全体の空間に作用し、$M_{m,\mathbb{R}}(\eta)$ は右移動により $\mathrm{Ker}(\mathcal{D}_{\lambda,\eta})$ に作用する。それ故、$\mathrm{Ker}(\mathcal{D}_{\lambda,\eta})$ の計算を行うときには η として「計算しやすいもの」についてのみ考えればよい。また $\mathrm{Ker}(\mathcal{D}_{\lambda,\eta})$ の $M_{m,\mathbb{R}}(\eta)$-加群としての構造は、第 *4* 節で計算するコホモロジー群の $K(\xi)^0_r$-加群としての構造と深い関係にあると思われる。

注 3.3 $G_\mathbb{R} = SO_0(2n,2)$ の場合、*Harish-Chandra* パラメータ $\Lambda = \sum_{i=1}^{n+1}\Lambda_i e_i$ に対して $\Lambda^* = \sum_{i=1}^{n-1} + (-1)^n\Lambda_n e_n + \Lambda_{n+1}e_{n+1}$ とすると $\pi^*_\Lambda \simeq \pi_{\Lambda^*}$ である。このことから π_Λ と π^*_Λ は同じ系列 $\Xi_k^\pm$ に含まれることがわかる。

3.2 Gelfand-Zetlin 基底

微分差分方程式系 $\mathcal{D}_{\eta,\lambda}\phi = 0$ を計算するためには $K_\mathbb{R} \simeq SO(2n)\times SO(2)$ の既約有限次元表現を実現しなければならない。そのためにここでは Gelfand-Zetlin 基底 ([4]) を用いる。

$\mathbf{q}_i = (q_{2n-i,1}, q_{2n-i,2}, \ldots, q_{2n-i,n-[i/2]})$ というベクトルを並べたもの $Q = (\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_{2n-1})$ で、

(i) すべての $q_{i,j}$ は整数

(ii) $j = 1,\ldots,i-1$ に対して $q_{2i+1,j} \geq q_{2i,j} \geq q_{2i+1,j+1}$

(iii) $q_{2i+1,i} \geq q_{2i,i} \geq |q_{2i+1,i+1}|$

(iv) $j = 1, \ldots, i-1$ に対して $q_{2i,j} \geq q_{2i-1,j} \geq q_{2i,j+1}$

(v) $q_{2i,i} \geq q_{2i-1,i} \geq -q_{2i,i}$

(vi) $q_{2n-1,j} = \lambda_j$

を満たすものを (λ-)Gelfand-Zetlin パターンということにしよう。

定理 3.4 *([4]) λ-Gelfand-Zetlin パターン全体の集合 $GZ(\lambda)$ は、highest weight が λ である $SO(2n)$ の既約有限次元表現 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ の基底になる。*

Lie 環 $\mathfrak{so}(2n)$ の元 $F_{p,q} := (\delta_{k,p}\delta_{l,q} - \delta_{k,q}\delta_{l,p})_{k,l=1,\ldots,2n}$ の作用は

$$\tau_\lambda(F_{2i+1,2i})Q = \sum_{j=1}^{i} a_{2i-1,j}(Q)\sigma_{2i-1,j}Q - \sum_{j=1}^{i} A_{2i-1,j}(Q)\tau_{2i-1,j}Q, \quad (i = 1, \ldots, n-1),$$

$$\tau_\lambda(F_{2i+2,2i+1})Q = \sum_{j=1}^{i} b_{2i,j}(Q)\sigma_{2i,j}Q - \sum_{j=1}^{i} B_{2i,j}(Q)\tau_{2i,j}Q + \sqrt{-1}c_{2i}(Q)Q, \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

と表される。ここで $\sigma_{p,q}$ ($\tau_{p,q}$) は、$\mathbf{q}_p$ の第 q-成分を 1 増やす (減らす) 作用素であり、$a_{p,q}(Q)$, $A_{p,q}(Q)$, $b_{p,q}(Q)$, $B_{p,q}(Q)$ は具体的にわかっている実数である (詳しく知りたい場合には原論文 [4] を参照)。

注 3.5 $q_{i,j}$ の最初の条件「すべて整数」を「すべて半整数」とすれば、$SO(2n)$ の表現に落ちない $Spin(2n)$ の表現の基底が得られ、本稿の全体の議論は全く同様にスピノル群の場合に適応できる。

3.3 Whittaker 関数の満たす微分差分方程式系

$K_\mathbb{R}$ の表現を Gelfand-Zetlin 基底を用いて実現できたので、あとは $\mathcal{D}_{\eta,\lambda}\phi = 0$ という微分差分方程式系を書き下して解けばよい。かなり長くて見づらい式になるが、ここで書いておこう。

$A_{m,\mathbb{R}}$ の座標 (a_1, a_2) を $\exp(\log a_1 A_1 + \log a_2 A_2)$ で入れ、$\partial_i = a_i \dfrac{\partial}{\partial a_i}$ とする。岩沢分解により $\mathcal{D}_{\eta,\lambda}\phi = 0$ の解は ϕ を $A_{m,\mathbb{R}}$ に制限した $\Phi := \phi|_{A_{m,\mathbb{R}}}$ によって決定される。

$N_{m,\mathbb{R}}$ のユニタリ指標全体の集合を $\sqrt{-1}(\mathfrak{n}_{m,0}/[\mathfrak{n}_{m,0}, \mathfrak{n}_{m,0}])^*$ と同一視し、ユニタリ指標 η として非退化もの、つまり $M_{m,\mathbb{R}}A_{m,\mathbb{R}}$-余随伴軌道 $\mathrm{Ad}^*(M_{m,\mathbb{R}}A_{m,\mathbb{R}})\eta$ が $\sqrt{-1}(\mathfrak{n}_{m,0}/[\mathfrak{n}_{m,0}, \mathfrak{n}_{m,0}])^*$ の開集合になるものをとり、さらに「計算しや

すいもの」(注 3.2 参照) を選んでおく。η のパラメータとして $\xi_1 \in \mathfrak{g}^*_{0,f_2}$, $\xi_2 \in \mathfrak{g}^*_{0,f_1-f_2}$ を用いる。

Highest weight が $\lambda = (\lambda'; \lambda_{n+1}) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \lambda_{n+1})$ である $K_{\mathbb{R}} \simeq SO(2n) \times SO(2)$ の既約有限次元表現 $V_\lambda \simeq V^{SO(2n)}_{\lambda'} \boxtimes V^{SO(2)}_{\lambda_{n+1}}$ と $\mathfrak{p}$ とのテンソル積の既約分解

$$\begin{aligned}V_\lambda \otimes \mathfrak{p} \simeq &\bigoplus_{k=1}^{n} V^{SO(2n)}_{\lambda'+e_k} \boxtimes V^{SO(2)}_{\lambda+e_{n+1}} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} V^{SO(2n)}_{\lambda'+e_k} \boxtimes V^{SO(2)}_{\lambda-e_{n+1}} \\ &\oplus \bigoplus_{k=1}^{n} V^{SO(2n)}_{\lambda'-e_k} \boxtimes V^{SO(2)}_{\lambda+e_{n+1}} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} V^{SO(2n)}_{\lambda'-e_k} \boxtimes V^{SO(2)}_{\lambda-e_{n+1}}\end{aligned}$$

に沿った射影を

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{\pm}_{k,+} &: V_\lambda \otimes \mathfrak{p} \longrightarrow V^{SO(2n)}_{\lambda'+e_k} \boxtimes V^{SO(2)}_{\lambda_{n+1}\pm e_{n+1}}, \\ \mathrm{pr}^{\pm}_{k,-} &: V_\lambda \otimes \mathfrak{p} \longrightarrow V^{SO(2n)}_{\lambda'-e_k} \boxtimes V^{SO(2)}_{\lambda_{n+1}\pm e_{n+1}}\end{aligned}$$

とする。

$\mathbf{q}_0 := (\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_{n-1} + 1, |\lambda_n| + 1)$ として $SO(2n)$ の λ-Gelfand-Zetlin パターン Q を $SO(2n+1)$ の Gelfand-Zetlin パターン $\tilde{Q} := (\mathbf{q}_0, Q)$ と同一視する。

以上の準備の下で、微分差分方程式系を書き下すことができる。

補題 3.6 $\Phi(a) = \sum_{Q \in GZ(\lambda)} c(Q; a) Q$ と表す。

(i) 方程式 $\mathrm{pr}^{\pm}_{k,+} \circ \nabla^{\pm}_{\lambda,\eta} \Phi(a) = 0$ は次の方程式系と同値である。

$$\begin{aligned}&a_{2n-1,k}(\tilde{Q}) \\ &\times \Bigg[\sqrt{-1} \left(\partial_1 \mp \frac{\xi_2 a_2}{2a_1} \mp \lambda_{n+1} - \lambda_k + k - 1 \right) c(Q; a) \\ &\qquad - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_{2n-2,j}(\tau_{2n-2,j} Q)}{l_{2n-1,k} - l_{2n-2,j} + 1} V^{\pm}_j(Q; a) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_{2n-2,j}(\sigma_{2n-2,j} Q)}{l_{2n-1,k} + l_{2n-2,j}} \Lambda^{\pm}_j(Q; a) \\ &\qquad\qquad - \frac{\sqrt{-1} c_{2n-2}(Q)}{l_{2n-1,k}} O^{\pm}(Q; a) \Bigg] \\ &= 0.\end{aligned}$$

(ii) 方程式 $\mathrm{pr}^{\pm}_{k,-} \circ \nabla^{\mp}_{\lambda,\eta}\Phi(a) = 0$ は次の方程式系と同値である。

$$
\begin{aligned}
&A_{2n-1,k}(\tilde{Q})\\
&\times\Bigg[\sqrt{-1}\left(\partial_1 \mp \frac{\xi_2 a_2}{2a_1} \mp \lambda_{n+1} + \lambda_k + 2n - k - 1\right) c(Q;a)\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_{2n-2,j}(\tau_{2n-2,j}Q)}{l_{2n-1,k} + l_{2n-2,j} - 1} V_j^{\pm}(Q;a) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_{2n-2,j}(\sigma_{2n-2,j}Q)}{l_{2n-1,k} + l_{2n-2,j}} \Lambda_j^{\pm}(Q;a)\\
&\qquad\qquad + \frac{\sqrt{-1}c_{2n-2}(Q)}{l_{2n-1,k}} O^{\pm}(Q;a)\Bigg]\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
l_{2i-1,j} &:= q_{2i-1,j} + i - j,\\
l_{2i,j} &:= q_{2i,j} + i + 1 - j,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_j^{\pm}(Q;a) :=& \left(\pm(\partial_2 - q_{2n-2,j} + j) + \frac{\xi_2 a_2}{2a_1}\right) c(\tau_{2n-2,j}Q;a)\\
&\pm \frac{\sqrt{-1}\xi_1}{a_2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{2n-3,i}(\tau_{2n-3,i}\tau_{2n-2,j}Q)}{l_{2n-2,j} - l_{2n-3,i} - 1} c(\tau_{2n-3,i}\tau_{2n-2,j}Q;a)\\
&\mp \frac{\sqrt{-1}\xi_1}{a_2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{2n-3,i}(\sigma_{2n-3,i}\tau_{2n-2,j}Q)}{l_{2n-2,j} + l_{2n-3,i} - 1} c(\sigma_{2n-3,i}\tau_{2n-2,j}Q;a),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda_j^{\pm}(Q;a) :=& \left(\pm(\partial_2 + q_{2n-2,j} + 2n - j - 1) + \frac{\xi_2 a_2}{2a_1}\right) c(\sigma_{2n-2,j}Q;a)\\
&\mp \frac{\sqrt{-1}\xi_1}{a_2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{2n-3,i}(\tau_{2n-3,i}\sigma_{2n-2,j}Q)}{l_{2n-2,j} + l_{2n-3,i}} c(\tau_{2n-3,i}\sigma_{2n-2,j}Q;a)\\
&\pm \frac{\sqrt{-1}\xi_1}{a_2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{2n-3,i}(\sigma_{2n-3,i}\sigma_{2n-2,j}Q)}{l_{2n-2,j} - l_{2n-3,i}} c(\sigma_{2n-3,i}\sigma_{2n-2,j}Q;a),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
O^{\pm}(Q;a) :=& \left(\pm(\partial_2 + n - 1) + \frac{\xi_2 a_2}{2a_1}\right) c(Q;a)\\
&\mp \frac{\sqrt{-1}\xi_1}{a_2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{2n-3,i}(\tau_{2n-3,i}Q)}{l_{2n-3,i}} c(\tau_{2n-3,i}Q;a)\\
&\mp \frac{\sqrt{-1}\xi_1}{a_2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{2n-3,i}(\sigma_{2n-3,i}Q)}{l_{2n-3,i}} c(\sigma_{2n-3,i}Q;a)
\end{aligned}
$$

とした。

3.4 微分差分方程式系の解

前小節で書き下した微分差分方程式系を用いれば、Whittaker 関数の計算は次の連立方程式を解くことに帰着される。

(i) $\Lambda \in \Xi_k^+$ のとき、$\phi \in \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\lambda,\eta}$ は

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{l,-}^{\pm} \circ \nabla_{\lambda,\eta}^{\pm} \Phi &= 0, & (l &= 1,\ldots,k-1), \\ \mathrm{pr}_{l,\pm}^{-} \circ \nabla_{\lambda,\eta}^{-} \Phi &= 0, & (l &= k,\ldots,n) \end{aligned}$$

と同値である。

(ii) $\Lambda \in \Xi_k^+$ のとき、$\phi \in \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\lambda,\eta}$ は

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{l,-}^{\pm} \circ \nabla_{\lambda,\eta}^{\pm} \Phi &= 0, & (l &= 1,\ldots,k-1), \\ \mathrm{pr}_{l,\pm}^{+} \circ \nabla_{\lambda,\eta}^{+} \Phi &= 0, & (l &= k,\ldots,n) \end{aligned}$$

と同値である。

この方程式系を解くには、特定の $Q_0 \in GZ(\lambda)$ たちで、

『$c(Q_0;a)$ がわかれば、差分を用いることにより、
全ての $c(Q;a)(Q \in GZ(\lambda))$ を決定できる』

というもの (「端にあるベクトル」とでも呼ぼうか) をまず見つけて $c(Q_0;a)$ を具体的に求め、その次に差分を用いて $c(Q;a)$ たちを決定していく。その上で差分に矛盾がないことを確かめる必要がある。しかし現在のところ $\Lambda \in \Xi_k^{\pm}$ $(k=2,\ldots,n-1)$ の場合には一般の Λ に対してはどこが「端」なのかがわかっていないため、Whittaker モデルや Whittaker 関数を特定できない。それら以外の場合には、うまく方程式系を解くことができて、その結果をまとめると次のようになる。

命題 3.7 *(i)* $\Lambda \in \Xi_k^{\pm}$ $(k=1,n+1)$ なら $\mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\lambda,\eta} = \{0\}$.

(ii) $\Lambda \in \Xi_k^+$ $(k=2,\ldots,n)$ とし

$$q_{2n-4,l-1} = \lambda_l, \quad (l = k,\ldots,n-1) \tag{1}$$

となる $Q \in GZ(\lambda)$ を考える。(特に $k=n$ ならばこの仮定は自動的に満たされる)。このとき

$$\lambda_l \geq q_{2n-2,l} = q_{2n-3,l} = q_{2n-4,l} \geq \lambda_{l+1}, \quad (l = 1,\ldots,k-2), \tag{2}$$

$$\lambda_l = q_{2n-2,l} = q_{2n-3,l}, \quad (l = k-1,\ldots,n-1) \tag{3}$$

を満たす λ-*Gelfand-Zetlin* パターン $Q \in GZ(\lambda)$ に対する $c(Q;a)$ たちから差分を使うことにより (1) を満たす $Q \in GZ(\lambda)$ に対する $c(Q;a)$ が決定される。

(iii) *(ii)* の状況の下で、(2), (3) を満たす $Q_0 \in GZ(\lambda)$ に対して

$$\begin{aligned} F(a) :=& a_1^{\lambda_n+\lambda_{n+1}+k-2+\sum_{\nu=1}^{k-1} l_{2n-1,\nu}-\sum_{\nu=1}^{k-2} l_{2n-2,\nu}} \\ & \times a_2^{\lambda_{k-1}+n-1} e^{-\xi_2 a_2/2a_1} c(Q_0;a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= (\partial_1 - \lambda_n - \lambda_{n+1} - k + n + 1)(\partial_1 - \lambda_n - \lambda_{k-1} - n + k) \\ &\qquad + \frac{\xi_2 a_2}{2a_1}(-\partial_1 + \partial_2) \\ \mathcal{L}_2 &= \partial_1^2 - \partial_2^2 + \frac{\xi_1^2}{a_2^2} \end{aligned}$$

と置くと、$F(a)$ は微分方程式 $\mathcal{L}_1 F(a) = \mathcal{L}_2 F(a) = 0$ の解である。

(iv) $\Lambda \in \Xi_n^+$ のとき、

$$\dim \mathrm{Ker}\mathcal{D}_{\lambda,\eta} \leq 4 \sum_{\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-2} \geq \lambda_{n-1}} \dim V_{(\mu_1,\ldots,\mu_{n-2})}^{SO(2n-3)}$$

が成り立つ。ここで $V_{(\mu_1,\ldots,\mu_{n-2})}^{SO(2n-3)}$ は *highest weight* が $(\mu_1,\ldots,\mu_{n-2})$ である $SO(2n-3)$ の既約有限次元表現である。

(v) $\Lambda \in \Xi_k^-$ となる Λ に対しても (ii), (iii), (iv) と類似の結果が成り立つ。

注 3.8 (iv) の不等号が等号であることを微分差分方程式系から直接確かめることは容易ではない。別の言い方をすれば、$c(Q;a)$ たちを決定する差分に矛盾がないことを方程式系から直接確かめることは困難である。そのために次の節で離散系列表現の随伴サイクルの明示式を求め、その結果を用いることにより正当化する。

4 Chang による随伴サイクルの計算

この節では [2], [3] の議論に従って随伴サイクルの明示式の計算を行う。Chang は実階数 1 の Lie 群の離散系列表現の随伴サイクルを求めたのであるが、彼のアイデアはある一つの命題が成り立つことが確かめられさえすれば一般階数の Lie 群の離散系列表現に対しても適応可能である。

4.1 旗多様体上の $\mathcal{D}$-加群

第2節と同様に、$\mathfrak{g}_0$ を実半単純 Lie 環、$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ を Cartan 分解、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を複素化した Cartan 分解とする。ここでは群 $G_{\mathbb{R}}$ には離散系列表現が存在することを仮定する、即ち $\mathrm{rank} G_{\mathbb{R}} = \mathrm{rank} K_{\mathbb{R}}$ を仮定する。

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$ を Cartan 部分代数とし、$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{n}}$ を一つの Borel 部分代数、$B \subset G$ を対応する Borel 部分群とする。これにより、$\bar{\mathfrak{n}}$ が負のルート空間の直和となるような、ルート系 $\Sigma(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ の正系 Σ^+ が定まる。$\Sigma_c^+ \subset \Sigma^+$ をコンパクト正ルートの集合とし、$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha$, $\rho_c = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Sigma_c^+} \alpha$, $\rho_n = \rho - \rho_c$ と表す。

よく知られているように、$\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数全体の集合 X は等質空間 G/B と自然に同一視される。これにより $\mathfrak{b}$ を X 上の点と思う。$\mathfrak{b}$ を通る X 上の K-軌道を Z とすると、$Z \simeq K/K \cap B$ と表されるが、$\mathfrak{b}$ の取り方により、Z は X 上の閉 K-軌道である。

$\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ を離散系列表現の Harish-Chandra パラメータとし、$d\tau = \Lambda - \rho$ となる H の一次元表現を $K \cap B$ の一次元表現に自明に拡張する。この表現から Z 上の K-同変な可逆層 $\mathcal{L}_{\Lambda-\rho}$ が構成される。

$\iota : Z \hookrightarrow X$ を埋め込み写像とすると、$\mathcal{D}$-加群としての順像 $\mathcal{I} := \iota_+(\mathcal{L}_{\Lambda-\rho})$ の大域切断の空間 $V := \Gamma(X, \mathcal{I})$ は離散系列表現の Harish-Chandra 加群になる (Beilinson-Bernstein [1] など)。

4.2 随伴多様体と随伴サイクル

この小節では V を一般の Harish-Chandra $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{R}})$-加群とする。

$K_{\mathbb{R}}$-不変な V の有限次元生成部分空間 V_0 を取り、$V_n := U(\mathfrak{g})_n V_0$ により V にフィルターを入れる。ここで $U(\mathfrak{g})_n$ は高々 n 個の $\mathfrak{g}$ の元の積たちの和で表される $U(\mathfrak{g})$ の元全体のなす部分ベクトル空間である。$\{U(\mathfrak{g})_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ は $U(\mathfrak{g})$ のフィルターになるが、Poincaré-Birkoff-Bitt の定理より $\mathrm{gr} U(\mathfrak{g})$ は自然に対称代数 $S(\mathfrak{g})$ と同一視され、さらにこれは $\mathfrak{g}^*$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ とも同一視される。よってフィルターの入れ方から、$M := \mathrm{gr} V$ には $S(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$-加群の構造が入る。代数幾何の初歩的な議論により、$\mathfrak{g}^*$ ($\mathrm{Spec}\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ と同一視する) 上に $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$-加群の層 $M^\sim$ が構成される。このとき

$$\mathcal{AV}(V) := \mathrm{Supp}(M^\sim) \subset \mathfrak{g}^*$$

を V の随伴多様体という。$X_1, \ldots, X_k$ を $\mathcal{AV}(V)$ の既約成分とし、各 X_i の生成点での $M^\sim$ の茎の階数を m_i として、形式和

$$Supp(M^\sim) := \sum_i m_i X_i$$

を考える。この形式和を V の随伴サイクルといい、$\mathcal{AC}(V)$ で表す。

4.3 離散系列表現の随伴サイクル

ここで話を離散系列表現に戻そう。

V が離散系列表現の Harish-Chandra 加群であるとき、$\mathcal{AV}(V)$ は既約な多様体であるので、$\mathcal{AC}(V) = m \cdot \mathcal{AV}(V)$ と表され、可換環論的な議論により、V の Bernstein 次数は $m \cdot \mathrm{deg}\mathcal{AV}(V)$ と一致する。ここで $\mathrm{deg}\mathcal{AV}(V)$ は随伴多様体 $\mathcal{AV}(V)$ の次数である。

小節 4.1 の議論を思い出そう。旗多様体 X 上の $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{I}$ の大域切断の空間 $V = \Gamma(X, \mathcal{I})$ によって離散系列表現の Harish-Chandra 加群が得られるのであった。このときモーメント写像 $\gamma : T^*X \to \mathfrak{g}^*$ により、$\mathrm{Supp}(\mathrm{gr}\mathcal{I})$ が $\mathcal{AV}(V)$ に写されることはよく知られている。Z が少なくとも閉軌道ならばさらに次のことが成り立つ。

定理 4.1 *([2], [3]) Z が閉 K-軌道なら*

$$\mathcal{AC}(V) = Supp(\gamma_* \mathrm{gr}\mathcal{I})$$

が成り立つ。

この定理により随伴サイクルを旗多様体上の幾何的な情報から計算することが可能になる。

4.4 Chang の計算

まず $\mathrm{Supp}(\mathrm{gr}\mathcal{I}) = T^*_Z X$ は既約な多様体であり、モーメント写像は K-同変であるので、$\gamma(T^*X)$ は一つの K-軌道 $\mathcal{O}$ の閉包になる。よって $\mathcal{AV}(V) = \bar{\mathcal{O}}$ と表されるが、$\mathfrak{g}^*$ 上の K-軌道の幾何は「よくわかっている」として、あとは随伴サイクルの係数を決めればよく、それは $\mathcal{O}$ の生成点での $\gamma_* \mathrm{gr}\mathcal{I}$ の茎の階数である。

$q : T^*_Z X \twoheadrightarrow X$ を自然な全射とする。$\mathcal{N}_{Z|X}$ を法層とすると、$\mathrm{gr}\mathcal{I}$ は $\mathcal{O}_X$-加群としては $\iota_*(\mathcal{L}_{\Lambda-\rho} \otimes \det \mathcal{N}_{Z|X} \otimes \mathcal{N}^{(\cdot)}_{Z|X}) \simeq \iota_*(\mathcal{L}_{\Lambda-\rho+2\rho_n} \otimes \mathcal{N}^{(\cdot)}_{Z|X})$ (ただし $\mathcal{N}^{(\cdot)}_{Z|X}$ は $\mathcal{N}_{Z|X}$ の対称代数) と表され、$\mathcal{O}_{T^*X}$-加群としては $q^*(\mathcal{L}_{\Lambda-\rho+2\rho_n})$ と表される (厳密にはさらにこれの T^*X への埋め込みによる順像をとる)。このことから $\gamma_* \mathrm{gr}\mathcal{I}$ の生成点 ξ での茎は $H^0(\gamma^{-1}(\xi), \mathcal{L}_{\Lambda-\rho+2\rho_n}|_{\gamma^{-1}(\xi)})$ と同型であることがわかる。これを計算するには $\gamma^{-1}(\xi)$ がどのようなものであるかきちんと見ておく必要がある。

$Z = K \cdot \mathfrak{b} \simeq K/K \cap B$ より、点 $\mathfrak{b}$ での余法空間は Killing 形式による $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ との同一視により $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^* \cap (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \simeq \bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p}$ と表される。よって $T^*_Z X \simeq K \times_{K \cap B} (\bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p})$ と表される。

ここで

$$N_K(\xi, \bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p}) := \{k \in K; k \cdot \xi \in \bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p}\}$$

とおく。モーメント写像のファイバーと X 上の一点の余法空間との交わりは高々一点であるので、$\gamma^{-1}(\xi)$ の点 $(g\cdot\mathfrak{b},\xi)\in X\times T^*_{g\cdot\mathfrak{b}}X$ を $g\cdot\mathfrak{b}$ と同一視すると、

$$\begin{aligned}(g\cdot\mathfrak{b},\xi')\in\gamma^{-1}(\xi) &\iff \xi'=\xi\in g\cdot(\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p})\cap(\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p})\\ &\iff g^{-1}\cdot\xi\in\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p}\\ &\iff g^{-1}\in N_K(\xi,\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p})\end{aligned}$$

により、

$$\gamma^{-1}(\xi)\simeq N_K(\xi,\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p})^{-1}\cdot\mathfrak{b}\subset Z$$

と表される。注意すべきことは、$N_K(\xi,\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p})$ は群ではなく、$N_K(\xi,\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p})^{-1}\cdot\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{b}$ に $N_K(\xi,\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p})$ の元の逆元を作用させたものの集合を意味していることである。

この $N_K(\xi,\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p})$ を求めるために、次のような群を考える。S をコンパクト単純ルート全体の集合、$\langle S\rangle$ を S で生成されるルート系、$\mathfrak{l}:=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\langle S\rangle}\mathfrak{g}_\alpha$ を Levi 部分環とする $\mathfrak{g}$ の放物型部分環を $\mathfrak{q}=\mathfrak{l}+\bar{\mathfrak{u}}(\supset\mathfrak{b})$、それらをリー環とする G の解析部分群をそれぞれ L, Q とおく。

次の命題がコホモロジー群の計算には非常に重要であるが、モーメント写像の複雑さにより、一般階数の群の場合には証明されていない(現時点では予想である)。

命題 4.2 K における ξ の中心化部分群を $K(\xi)$ と表し、その単位元連結成分の簡約部分を $K(\xi)^0_r$ で表す。このとき $G_{\mathbb{R}}$ が *(少なくとも)* 実階数 1 のリー群であるなら、

$$N_K(\xi,\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p})=(K\cap Q)\cdot K(\xi)=(K\cap Q)\cdot K(\xi)^0_r$$

が成り立つ。ただし中辺・右辺は二つの群の元の積全体からなる集合という意味である。

注 4.3 $K\cap Q$ は $\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p}$ を正規化し、$K(\xi)$ は ξ を不変にするので、中辺が左辺に含まれることは自明である。左の等号の逆の包含関係の証明が難しい。

以下、この命題が成り立つ場合にコホモロジー $H^0(\gamma^{-1}(\xi),\mathcal{L}_{\Lambda-\rho+2\rho_n}|_{\gamma^{-1}(\xi)})$ の計算を $Y:=G/Q$ という一般化された旗多様体上で行おう。このとき $\mathfrak{q}$ を通る Y 上の K-軌道 Z' は $Z'=K\cdot\mathfrak{q}\simeq K/K\cap Q$ であり、$(\mathfrak{g}/\mathfrak{q})^*\cap(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*\simeq\bar{\mathfrak{u}}\cap\mathfrak{p}=\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p}$ であるので、$T^*_{Z'}Y\simeq K\times_{K\cap Q}(\bar{\mathfrak{n}}\cap\mathfrak{p})$ と表される。これにより、$p:Z\twoheadrightarrow Z'$ を自然な射影としたとき、$\gamma^{-1}(\xi)=K(\xi)\cdot(K\cap Q)\cdot\mathfrak{b}=p^{-1}(K(\xi)p(\mathfrak{b}))=p^{-1}(K(\xi)\cdot\mathfrak{q})$ となる。結局モーメント写像のファイバーは

$$\gamma^{-1}(\xi)=p^{-1}(K(\xi)^0_r\cdot\mathfrak{q})$$

と表される。

$\gamma^{-1}(\xi)$ と Z の部分集合との同一視を用いると、

$$\begin{array}{ccc} Z & \overset{p}{\twoheadrightarrow} & Z' \\ \uparrow \iota_1 & & \uparrow \iota_2 \\ \gamma^{-1}(\xi) & \overset{p}{\twoheadrightarrow} & K(\xi)^0_r \cdot \mathfrak{q} \end{array}$$

はデカルト平方であるから、底変換により

$$\begin{aligned} H^0(\gamma^{-1}(\xi), \mathcal{L}_{\Lambda-\rho+2\rho_n}|_{\gamma^{-1}(\xi)}) &= H^0(p^{-1}(K(\xi)^0_r \cdot \mathfrak{q}), \mathcal{L}_{\Lambda-\rho+2\rho_n}|_{\gamma^{-1}(\xi)}) \\ &\simeq H^0(K(\xi)^0_r \cdot \mathfrak{q}, p_* \iota_{1*} \mathcal{L}_{\Lambda-\rho+2\rho_n}) \\ &\simeq H^0(K(\xi)^0_r \cdot \mathfrak{q}, (p_* \mathcal{L}_{\Lambda-\rho+2\rho_n})|_{K(\xi)^0_r \cdot \mathfrak{q}}) \end{aligned}$$

となる。

ここで $p^{-1}(\mathfrak{q}) \simeq L/L \cap B$ であるので、Borel-Weil の定理により $p_* \mathcal{L}_{\Lambda-\rho+2\rho_n}$ の $\mathfrak{q}$ でのファイバーは、highest weight が $\Lambda-\rho+2\rho_n$ である L の既約有限次元表現を自明に拡張した $K \cap Q$ の表現 $V^{K\cap Q}_{\Lambda-\rho+2\rho_n}$ である。よって $(p_*\mathcal{L})|_{K(\xi)^0_r \cdot \mathfrak{q}}$ は $\mathrm{Res} \downarrow^{K\cap Q}_{K(\xi)^0_r \cap Q} V^{K\cap Q}_{\Lambda-\rho+2\rho_n}$ から誘導される $K(\xi)^0_r \cdot \mathfrak{q}$ 上の $K(\xi)^0_r$-等質ベクトル束の局所切断のなす層である。

そこでもう一度 Borel-Weil の定理を用いると、結局次の定理が成り立つ。

定理 4.4 命題 *4.2* が成り立つとき、

$$H^0(\gamma^{-1}(\xi), \mathcal{L}_{\Lambda-\rho+2\rho_n}|_{\gamma^{-1}(\xi)}) \simeq \text{Coh-Ind} \uparrow^{K(\xi)^0_r}_{K(\xi)^0_r \cap Q} \mathrm{Res} \downarrow^{K\cap Q}_{K(\xi)^0_r \cap Q} V^{K\cap Q}_{\Lambda-\rho+2\rho_n}$$

が成り立つ。ここで Coh-Ind はコホモロジー誘導、即ち小さな群の表現と同じ *highest weight* を持つ大きな群の表現を構成する操作である。

今までの議論から、このコホモロジー空間の次元が随伴サイクルの係数の明示公式になっていることがわかる。

5 Whittaker モデル・Whittaker 関数の決定

我々の計算にこの Chang の議論を用いて良いかどうかが問題であるが、それは次の命題で保証される。

命題 5.1 *Gelfand-Kirillov* 次元が $\dim \mathfrak{n}_{m,0}$ に等しい $G_{\mathbb{R}} = SO_0(2n,2)$ の離散系列表現 *(*つまり *Whittaker* モデルを持つ離散系列表現*)* に対しても命題 *4.2* は成り立つ。

$\Lambda \in \Xi_k^+$ $(k = 2, \ldots, n)$ の場合の証明のスケッチを書いておこう。$\Lambda \in \Xi_k^-$ の時も同様に考えればよい。

このとき、$\bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p}$ は、ルート $\{-e_i \pm e_{n+1}\}$ $(i = 1, \ldots, k-1)$, $\{-e_{n+1} \pm e_i\}$ $(i = k, \ldots, n)$ に対応するルート空間の直和であり、ルート α の(適当な)ルートベクトルを X_α で表すと、$\xi \in \bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p}$ として $\xi = X_{-e_1+e_{n+1}} + X_{e_n-e_{n+1}} + X_{-e_n-e_{n+1}}$ がとれる (ξ の取り方については、例えば山本敦子の方法 ([8]) を用いるとよい)。この ξ に対して計算すると、

$$
\begin{aligned}
&K(\xi)_r \simeq \{\pm 1\} \times SO(2n-3, \mathbb{C}), \\
&K(\xi) = K(\xi)_r \exp\left(\sum_{i=2}^{n-1}(a_i X_{-e_1+e_i} + b_i X_{-e_1-e_i}) + a_n(X_{-e_1+e_n} + X_{-e_1-e_n})\right)
\end{aligned}
$$

となる。次に $N_k(\xi, \bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p})$ を計算しよう。まず今の場合、K の放物型部分群 $K \cap Q$ は $L \simeq GL(k-1, \mathbb{C}) \times SO(2(n-k+1), \mathbb{C}) \times SO(2, \mathbb{C})$ を Levi 部分群とするものである。単純ルートの集合 $\{e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n\}$ が Levi 部分群のルート系を生成するような K の放物型部分群を P とする。この P は $K(\xi)$ を含むように取った。$K \cap Q$ と P による Bruhat 分解を用いて $k \in N_K(\xi, \bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p})$ を $k = qwp$ $(q \in K \cap Q,\ w \in (\mathfrak{S}_{k-1} \times (\mathfrak{S}_{n-k+1} \ltimes \mathbb{Z}_2^{n-k})) \backslash \mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_2^{n-1} / (\mathfrak{S}_{n-1} \ltimes \mathbb{Z}_2^{n-2}),\ p \in P)$ と表す。注 4.3 により $K \cap Q$ は $\bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p}$ を正規化するので、$k \cdot \xi \in \bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p} \Leftrightarrow p \cdot \xi \in w^{-1}(\bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p})$ であるが、具体的な計算により、これが成り立つためには w が単位元の時だけを考えればよいことがわかる。$p \cdot \xi \in \bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p}$ を計算すれば結局 $N_K(\xi, \bar{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{p}) = (K \cap Q) \cdot K(\xi)$ となることがわかる。$K(\xi)$ は二つの連結成分からなるが、それぞれの連結成分の代表元として $\exp \mathfrak{h}$ に含まれるものがとれるので、結局命題 4.2 が成り立つことがわかり、定理 4.4 を適用できる。この定理に出てくる群を $SO_0(2n, 2)$ の場合に計算すると以下のようになる:

$$
\begin{aligned}
K(\xi)_r^0 &\simeq SO(2n-3, \mathbb{C}), \\
K \cap Q &\simeq GL(k-1, \mathbb{C}) \times SO(2(n-k+1), \mathbb{C}) \times SO(2, \mathbb{C}), \\
K(\xi)_r^0 \cap Q &\simeq GL(k-2, \mathbb{C}) \times SO(2n-2k+1, \mathbb{C}).
\end{aligned}
$$

この結果を用いて表現を計算する。以下、highest weight が ν である、群 F の既約有限次元表現を V_ν^F で表す。$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \lambda_{n+1}) = \Lambda - \rho + 2\rho_n$ とすれば、

$$
V_{\Lambda-\rho+2\rho_n}^{K\cap Q} = V_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1})}^{GL(k-1,\mathbb{C})} \boxtimes V_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_n)}^{SO(2(n-k+1),\mathbb{C})} \boxtimes V_{\lambda_{n+1}}^{SO(2,\mathbb{C})},
$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Res}\downarrow_{K(\xi)_r^0\cap Q}^{K\cap Q} V_{\Lambda-\rho+2\rho_n}^{K\cap Q} \\
&\simeq \bigoplus_{\substack{\lambda_1\geq\mu_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_{k-2}\geq\mu_{k-2}\geq\lambda_{k-1} \\ \lambda_k\geq\mu_1'\geq\lambda_{k+1}\geq\cdots\geq\lambda_{n-1}\geq\mu_{n-k}'\geq|\lambda_n|}} V_{(\mu_1,\ldots,\mu_{k-2})}^{GL(k-2,\mathbb{C})} \boxtimes V_{(\mu_1',\ldots,\mu_{n-k}')}^{SO(2n-2k+1,\mathbb{C})},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&\text{Coh-Ind}\uparrow^{K(\xi)^0_r}_{K(\xi)^0_r\cap Q}\text{Res}\downarrow^{K\cap Q}_{K(\xi)^0_r\cap Q}V^{K\cap Q}_{\Lambda-\rho+2\rho_n}\\ &\simeq\bigoplus_{\substack{\lambda_1\geq\mu_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_{k-2}\geq\mu_{k-2}\geq\lambda_{k-1}\\ \lambda_k\geq\mu'_1\geq\lambda_{k+1}\geq\cdots\geq\lambda_{n-1}\geq\mu'_{n-k}\geq|\lambda_n|}}V^{SO(2n-3,\mathbb{C})}_{(\mu_1,\ldots,\mu_{k-2},\mu'_1,\ldots,\mu'_{n-k})}\end{aligned}$$

となる。

この式の右辺は λ_n の符号に依存していない。$k=2,\ldots,n$ のとき、$\Lambda_n=\lambda_n$ であるので、注3.3を思い出せば、$SO_0(2n,2)$ の離散系列表現とその反傾表現の随伴サイクルは一致していることがわかる。

$k=n$ の時、この結果と命題 3.7(iv) とを比べてみよう。

λ が「壁に近いとき」つまり $\lambda_i-\lambda_{i+1}$ $(i=1,\ldots,n-2)$ が小さいとき、Schmid 作用素から得られる Whittaker 関数の微分差分方程式系の差分の項には矛盾がないこと、つまり、命題 3.7(ii) の条件を満たす $Q\in GZ(\lambda)$ に対する $c(Q;a)$ を命題 3.7(iii) の解として求め、それから差分を用いて他の $Q\in GZ(\lambda)$ に対する $c(Q;a)$ を決めていくときに、用いる差分によって違いが出ないことが直接計算で示すことができる。よってこのときは命題 3.7(iv) の式で等号が成り立つ。

4.3 節に書いたように、随伴多様体が既約な時、表現の Bernstein 次数と随伴サイクルの係数は随伴多様体によって決まる定数倍を除いて一致する。今の場合、定理 2.1 を用いれば、λ が「壁に近いとき」の議論から、この定数が 4 であることがわかった。それ故命題 3.7(iv) の右辺が一般の λ に対する Bernstein 次数の明示公式を与えており、もう一度定理 2.1 を用いれば、命題 3.7(iv) で等号が成り立つことがわかる。今まで $\Lambda\in\Xi^+_n$ に対応する離散系列表現を扱っていたが、Bernstein 次数と随伴サイクルの係数との比率は随伴多様体のみによって決まっている。$\Lambda\in\Xi^+_k$ $(k=2,\ldots,n)$ に対応する離散系列表現の随伴多様体は全て等しいので、今得た結果から $k=2,\ldots,n-1$ の場合にも、Whittaker 関数の明示式は求まらないものの、モデルの次元つまり Bernstein 次数は求まったことになる。以上の議論によって得られた結果を本稿の主定理としてまとめておこう。

定理 5.2 *(i)* $\Lambda\in\Xi^+_k$ $(k=2,\ldots,n)$ *に対応する離散系列表現の Bernstein 次数は*

$$4\sum_{\substack{\lambda_1\geq\mu_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_{k-2}\geq\mu_{k-2}\geq\lambda_{k-1}\\ \lambda_k\geq\mu'_1\geq\lambda_{k+1}\geq\cdots\geq\lambda_{n-1}\geq\mu'_{n-k}\geq|\lambda_n|}}\dim V^{SO(2n-3,\mathbb{C})}_{(\mu_1,\ldots,\mu_{k-2},\mu'_1,\ldots,\mu'_{n-k})}$$

である。

(ii) $\Lambda\in\Xi^+_n$ *に対応する離散系列表現の反傾表現 (注 3.3) の Whittaker 関数は命題 3.7(iii) の微分方程式の解から得られる。*

$\Lambda\in\Xi^-_n$ *の場合にも同様の結果が成り立つ。*

最後に Whittaker 関数の明示公式について少し説明しておく。$n=2$ のとき、$SO_0(4,2) \approx SU(2,2)$ であることに注意する。今得た定理で $n=2$ とすると、これは $SU(2,2)$ の離散系列表現の Whittaker 関数が満たすべき微分方程式であり、その解の積分表示が [5] で与えられている。一般の n に対する方程式は $n=2$ のときのもののパラメータを変えたものに過ぎないので、Whittaker 関数の積分表示は [5] のもののパラメータを修正すれば得られる。

References

[1] A. Beilinson and J. Bernstein, *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **292** (1981), 15–18.

[2] J.T. Chang, *Characteristic cycles of holomorphic discrete series*, Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 213–227.

[3] J.T. Chang, *Characteristic cycles of discrete series for $\mathbb{R}$-rank one groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), 603–622.

[4] I.M. Gelfand and M.L. Zetlin, *Finite-dimensional representations of the group of orthogonal matrices*, Dokl. Akad, Nauk SSSR **71** (1950), 1017–1020.

[5] T. Hayata and T. Oda, *An explicit integral representation of Whittaker functions for the representations of the discrete series – the cases of $SU(2,2)$ –*, J. Math. Kyoto Univ. **37-3** (1997), 519–530.

[6] H. Matumoto, *Whittaker vectors and the Goodman-Wallach operators*, Acta math. **161** (1988), 183–241.

[7] D.A. Vogan Jr., *Associated varieties and unipotent representations*, in Harmonic analysis on reductive groups : Proceedings of the Bowdoin conference 1989, Bowdoin College, (1989), 315–388.

[8] A. Yamamoto, *Orbits in the flag variety and images of the moment map for classical groups I*, Repr. theory, an electric J. Amer. Math. Soc. **1** (1997), 329–404.

[9] H. Yamashita, *Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, I – General theory and the case of $SU(2,2)$ –*, Japan. J. Math. **16-1** (1990), 31–95.